2. b) Antisimétrica: diagonal nula, $w = 0$. Además $a_{12} = -a_{21} \Rightarrow 0 = -x$, $x = 0$; $a_{13} = -a_{31} \Rightarrow z = -3$; $a_{23} = -a_{32} \Rightarrow y = -z = 3$.

Resultado: a) $x = 0$, $y = z = 3$, $w \in \mathbb{R}$ cualquiera. b) $w = 0$, $x = 0$, $y = 3$, $z = -3$.

Ejercicio 6.5.7 · Existencia de la inversa con parámetro

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 6.

Sea la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 2 & k & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obtenga los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que existe C^{-1}.

Resolución.

1. C^{-1} existe si y solo si $\det C \neq 0$.
2. Por el primer renglón:

$$\begin{aligned} \det C &= 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(0+2) - k(0-2) - (-3+1) = 2k + 6. \end{aligned}$$

3. $2k + 6 = 0$ solo si $k = -3$.

Resultado: existe C^{-1} para todo $k \in \mathbb{R}$ con $k \neq -3$.

Ejercicio 6.5.8 · Cofactores e inversa por la adjunta

Adaptado de: 2º final 2017-2, tipo A, problema 6.

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & b \\ a & -1 & -3 \\ -2 & c & -4 \end{bmatrix}.$$

- a) Si $C_{23} = 23$, $C_{13} = -12$ y $C_{31} = 5$ son cofactores de A, determine a, b y $c \in \mathbb{R}$.
- b) Si $a = b = -1$ y $c = 0$, obtenga A^{-1} con el método de la adjunta.

Resolución.

1. a) $C_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & c \end{vmatrix} = -(3c - 8) = 8 - 3c = 23$, así que $c = -5$.
2. $C_{13} = (+1)\begin{vmatrix} a & -1 \\ -2 & c \end{vmatrix} = ac - 2 = -12$, así que $ac = -10$ y $a = 2$.
3. $C_{31} = (+1)\begin{vmatrix} -4 & b \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 12 + b = 5$, así que $b = -7$.
4. b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. Cofactores, renglón por renglón:

$$\begin{aligned} &C_{11} = 4, && C_{12} = 2, && C_{13} = -2; \\ &C_{21} = -16, && C_{22} = -14, && C_{23} = 8; \\ &C_{31} = 11, && C_{32} = 10, && C_{33} = -7. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.5.6 · Regla de los signos de Descartes y factores lineales

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 3.

Para el polinomio $h(x) = x^7 + 3x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 2x^3$, aplique la regla de los signos de Descartes y exprese $h(x)$ como producto de sus factores lineales.

Resolución.

1. $h(x) = x^3\,q(x)$ con $q(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$. $x = 0$ es raíz de multiplicidad 3.
2. Descartes en q. Signos de $q(x)$: $+\ +\ +\ +\ +$, 0 cambios: **ninguna raíz positiva**.
3. $q(-x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$: signos $+\ -\ +\ -\ +$, 4 cambios: 4, 2 o 0 raíces negativas.

	1ª	2ª	3ª
Positivas	0	0	0
Negativas	4	2	0
Complejas	0	2	4
Total	4	4	4

   (Contando $x = 0$, h tiene además tres raíces nulas.)
4. Candidatos racionales de q: $\pm1, \pm2$; solo se prueban los negativos.

	1	3	3	3	2
-1		-1	-2	-1	-2
-2	1	2	1	2	0
		-2	0	-2	
	1	0	1	0	

5. Queda $x^2 + 1 = 0$: $x = \pm i$. Se cumple la segunda posibilidad de la tabla.
6. $h(x) = x^3(x+1)(x+2)(x-i)(x+i)$.

Ejercicio 4.5.7 · Raíz de multiplicidad 2

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 4.

Sea $p(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + kx^2 + mx - m$.

- a) Obtenga k y m si $\alpha = 1$ es raíz de multiplicidad 2.
- b) Con esos valores, determine las raíces de $p(x)$.

Resolución.

1. Primera división entre $x - 1$:

	1	-1	-5	k	m	$-m$
1		1	0	-5	$k-5$	$k-5+m$
	1	0	-5	$k-5$	$k-5+m$	$k-5$

   Residuo $k - 5 = 0$: $k = 5$. El cociente es $x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 0x + m$.
2. Segunda división entre $x - 1$:

	1	0	-5	0	m
1		1	1	-4	-4
	1	1	-4	-4	$m-4$

   Residuo $m - 4 = 0$: $m = 4$.

Resultado: $X = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ \frac{23}{2} & -5 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.5.3 · Ecuación con A^*

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 5.

Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

obtenga la matriz X que satisface $XA^* - 2I = (X + C)B$.

Resolución.

1. A es real, así que $A^* = A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.
2. Se desarrolla el lado derecho: $XA^* - 2I = XB + CB$. Con X a la izquierda: $X(A^* - B) = 2I + CB$.
3. $A^* - B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\det = 3 - 2 = 1$, $(A^* - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
4. $CB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $2I + CB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.
5. $X = (2I + CB)(A^* - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Resultado: $X = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.5.4 · X^T e inversa de 3×3 por Gauss-Jordan

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 5.

Resuelva la ecuación matricial $AX^T = B + 2C$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Resolución.

1. $B+2C = \begin{bmatrix} 3-2 & 0 & 1-1 \\ -1+1 & 5-4 & 0 \\ 4-4 & 3-3 & -2+3 \end{bmatrix} = I$. La ecuación queda $AX^T = I$, así que $X^T = A^{-1}$ y $X = (A^{-1})^T$.
2. Gauss-Jordan sobre $[\,A \mid I\,]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+3R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3+3R_2]{R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Resultado: $h(x) = x^2(x - i)(x + 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 4.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 3.

Obtenga las raíces de $f(x) = p(x)\,q(x)$, donde $p(x) = x^2 + 1$ y $q(x) = x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 20x^3$.

Resultado: $i,\ -i,\ 0$ (triple), $4,\ \frac{-1+\sqrt{21}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 4.6.4

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo B, problema 3.

Para $g(x) = x^7 - 3x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 2x^3$, aplique la regla de los signos de Descartes y exprese $g(x)$ como producto de sus factores lineales.

Resultado: Posibilidades (positivas, negativas, complejas) del factor de grado 4: $(4, 0, 0)$, $(2, 0, 2)$, $(0, 0, 4)$. $g(x) = x^3(x - 1)(x - 2)(x - i)(x + i)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 4.6.5

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 4.

Sea $p(x) = Ax^3 + 2x^2 - Bx + 2$. Determine:

- a) los valores de A y $B \in \mathbb{R}$ si $p(1) = -4$ y $p(2) = 0$;
- b) las raíces de $p(x)$ con esos valores.

Resultado: a) $A = 1$, $B = 9$. b) $2,\ -2 + \sqrt{5},\ -2 - \sqrt{5}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 4.6.6

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 3.

Obtenga las raíces de $p(x) = x^5 - (1 - 3i)x^4 + 5x^3 - (5 - 15i)x^2 + 4x - (4 - 12i)$, si se sabe que $1 - 3i$ es raíz.

Resultado: $1 - 3i,\ i,\ -i,\ 2i,\ -2i$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

4.7 Errores frecuentes

- **Olvidar los ceros en la división sintética.** En $2x^5 - x^4 - 2x + 1$ faltan x^3 y x^2: sus coeficientes son 0 y deben escribirse.
- **Usar el conjugado con coeficientes complejos.** Si algún coeficiente tiene i, el conjugado de una raíz no es raíz en general. Se divide solo entre $x - \alpha$.
- **No usar el conjugado con coeficientes reales.** Si son reales, el conjugado sí es raíz y ahorra una búsqueda.
- **Perder la raíz $x = 0$.** Cuando no hay término independiente, x^k se factoriza primero y cuenta como raíz de multiplicidad k.

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 6.
Determine la matriz X que satisface $AX + D = C - BX$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Planteamiento. Las dos X están a la derecha de su coeficiente: $AX + BX = C - D$, así que $(A + B)X = C - D$ y $X = (A + B)^{-1}(C - D)$.
Resolución.
1. $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, con $\det(A + B) = 6 - 5 = 1$.
2. $(A + B)^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.
3. $C - D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.
4. $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-1 & 4-3 \\ -15+3 & -10+9 \end{bmatrix}$.

Resultado: $X = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -12 & -1 \end{bmatrix}$.
Comprobación (elemento 11): $AX + D$ da $2(5) + 1(-12) + 1 = -1$; $C - BX$ da $4 - [1(5) + 0] = -1$.

Ejemplo resuelto · Determinante de orden 5

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 5.
Calcule el valor del determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 9 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Planteamiento. La columna 4 tiene un solo elemento distinto de cero, el $a_{34} = 1$. Se desarrolla por esa columna y luego por la columna con más ceros del menor.
Resolución.
1. Por la columna 4: $\det A = (-1)^{3+4}(1)\, M_{34} = -M_{34}$, con

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. En M_{34}, la columna 2 solo tiene el 4 en la posición $(1, 2)$:

$$M_{34} = (-1)^{1+2}(4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$$

Unidad 5 · Sistemas de ecuaciones lineales: planteamiento, método de Gauss y parámetros

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno formulará, como modelo matemático de problemas, sistemas de ecuaciones lineales y los resolverá aplicando el método de Gauss. El programa de 2016 dice lo mismo.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** un problema en los 17 finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1) y en los 41 del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1). En el Plan 2010 domina el planteamiento (12 de 17), seguido de la solución general y particular (3) y el sistema con parámetro (2). En el Plan 2016 domina el sistema con parámetro (21 de 41), seguido del conjunto solución (10), el planteamiento (9) y construir un sistema a partir de su solución (1).
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 5.1 y 5.3 (25 min).
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 5.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 5.5 con cronómetro (15 min cada uno).

5.1 Conceptos y expresiones

Ecuación y sistema lineal. Una ecuación es *lineal* si cada incógnita aparece a la primera potencia y sin multiplicarse por otra: $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n = b$. Un *sistema* de m ecuaciones lineales con n incógnitas se escribe con su *matriz aumentada*, que guarda los coeficientes y, separados por una barra, los términos independientes:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 200 \\ 2x - y - 2z &= 0 \\ 8x + 5y + 15z &= 1640 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 8 & 5 & 15 & 1640 \end{array}\right]$$

Una *solución* es una lista de valores que satisface todas las ecuaciones a la vez; el *conjunto solución* reúne todas.

Clasificación. Todo sistema cae en uno de tres casos:

Tipo	Qué se ve al terminar Gauss
Incompatible	ninguna solución: aparece un renglón $0\ 0\ 0 \mid c$ con $c \neq 0$. Se revisa primero
Compatible determinado	sin ese renglón, una sola solución: hay un pivote en cada columna de incógnita
Compatible indeterminado	sin ese renglón, infinitas soluciones: hay menos pivotes que incógnitas (con o sin renglones $0 = 0$)

5. Comprueba en el enunciado (no solo en las ecuaciones) y responde con palabras y unidades.

Traducciones frecuentes. «A es igual a B más la mitad de C»: $A = B + \frac{1}{2}C$, es decir, $2A - 2B - C = 0$. «A es el doble de B más tres»: $A = 2B + 3$. «Hay 10 menos de C que el total de los otros dos»: $C = A + B - 10$. En una tabla de horas por producto, cada *renglón* (cada máquina) da una ecuación: horas por unidad de cada tipo multiplicadas por las unidades, igual al total de horas.

5.3.2 Método de Gauss

1. Escribe la matriz aumentada. Si conviene, intercambia renglones para que el primer pivote sea 1.
2. Haz ceros debajo del primer pivote con operaciones $R_i - cR_1$.
3. Repite con el segundo pivote en los renglones de abajo, y así hasta la forma escalonada. Escribe cada operación sobre la flecha.
4. Lee el último renglón: si es $0\ 0\ 0 \mid c$ con $c \neq 0$, el sistema es incompatible.
5. Despeja de abajo hacia arriba y comprueba en las ecuaciones originales.

5.3.3 Sistema con parámetro

1. Escalona la matriz aumentada sin dividir entre expresiones que tengan el parámetro (podrían valer cero). Si un renglón tiene el parámetro, déjalo abajo.
2. Al final, el último renglón queda como $0\ 0\ f(k) \mid g(k)$.
3. Resuelve $f(k) = 0$. Si $f(k) \neq 0$: compatible determinado.
4. Para cada raíz k_0 de f: si $g(k_0) = 0$, el renglón es $0 = 0$ y el sistema es compatible indeterminado; si $g(k_0) \neq 0$, es incompatible.
5. Responde los tres incisos, aunque alguno sea «ningún valor de k».

Comprobación con el determinante. Si el sistema es cuadrado, el determinante de la matriz de coeficientes vale cero justo en las raíces de $f(k)$. Sirve para comprobar, pero no sustituye la lectura del último renglón: con det = 0 el sistema puede ser indeterminado o incompatible.

5.3.4 Solución general y particular

1. Escalona hasta que se vean los pivotes.
2. Las incógnitas sin pivote son libres: $z = t$, $y = s$, con $t, s \in \mathbb{R}$.
3. Despeja las demás en función de los parámetros.
4. Escribe la solución general como terna (o cuarteta) y elige valores sencillos de los parámetros para una particular. Comprueba la particular en las ecuaciones originales.

5.3.5 Construir un sistema a partir de su solución

Si el conjunto solución es $\{(x, y, z) = (\dots)\}$ con un parámetro, elimina el parámetro: despéjalo de una coordenada y sustitúyelo en las otras dos. Cada igualdad que ya no lo contiene es una ecuación del sistema. Una tercera ecuación puede ser la suma de las dos primeras: el sistema sigue teniendo las mismas soluciones.

A con la columna k cambiada por B. En los exámenes casi no se pide; Gauss (Unidad 5) es más rápido.

6.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«obtener la matriz X que satisface la ecuación»	despejar X	6.3.1
la ecuación trae det, tr, adj o A^*	calcular esos números o matrices primero	6.3.1
X^T en la ecuación	despejar X^T y transponer al final	6.3.1
«obtener A^{-1}» o una inversa de 3×3	Gauss-Jordan o adjunta	6.3.2, 6.3.3
«calcular el determinante» de orden 4 o 5	cofactores sobre la línea con más ceros	6.3.4
«valores de k para que exista A^{-1}», «para que $\det A = 0$»	determinante en función del parámetro	6.3.5
«los cofactores de A son…»	ecuaciones con los cofactores	6.3.3
«para que A sea simétrica (antisimétrica)»	igualar a_{ij} con $\pm a_{ji}$	6.3.6

6.3 Procedimientos

6.3.1 Despejar una ecuación matricial

1. Calcula primero los **números** que aparecen: $\det A$, $\operatorname{tr} B$, $\det(A^{-1}) = 1/\det A$, $\det(2B^{-1}) = 2^n/\det B$. Calcula también A^*, A^T o $\operatorname{adj} B$ si aparecen.
2. Pasa todos los términos con X a un lado y los demás al otro, **respetando el lado**: XA tiene X a la izquierda; AX, a la derecha.
3. Factoriza X del mismo lado en todos los términos:

$$XA - XB = X(A - B), \qquad AX + BX = (A + B)X, \qquad kX = kIX = XkI.$$

   Si un término trae X a la izquierda y otro a la derecha (AX y XB), no se puede factorizar: el método no aplica.
4. Multiplica por la inversa **del mismo lado**:

$$MX = N \;\Rightarrow\; X = M^{-1}N, \qquad XM = N \;\Rightarrow\; X = NM^{-1}.$$

5. Si la incógnita aparece como X^T, despeja X^T y transpón al final: $X = (X^T)^T$.
6. Comprueba con una entrada: sustituye X en la ecuación original y verifica al menos un elemento.

Unidad 6 · Matrices y determinantes: ecuaciones matriciales, inversa y determinantes

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno aplicará los conceptos fundamentales de las matrices, determinantes y sus propiedades a problemas que requieran de ellos para su resolución. El programa de 2016 dice lo mismo.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** un problema en los 17 finales del Plan 2010 (18 problemas; en 16 exámenes es una **ecuación matricial**) y en los 41 finales del Plan 2016 (43 problemas; ecuación matricial en 30). Los demás piden un determinante con parámetro, la existencia de la inversa, cofactores o matrices simétricas y antisimétricas.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 6.1 y el procedimiento 6.3.1 (30 min).
  2. Sigue los ejemplos 6.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 6.5.1, 6.5.3 y 6.5.7 con cronómetro (15 min cada uno).

6.1 Conceptos y expresiones

Matriz. Una matriz $A = [a_{ij}]$ de $m \times n$ es un arreglo de m renglones y n columnas; a_{ij} es el elemento del renglón i y la columna j. Dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y los mismos elementos.

Operaciones. La suma y la multiplicación por un escalar se hacen elemento a elemento. El producto AB existe si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B; el elemento ij de AB es el renglón i de A por la columna j de B:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k} a_{ik} b_{kj}.$$

- El producto es asociativo, $A(BC) = (AB)C$, y distributivo, $A(B + C) = AB + AC$.
- **No es conmutativo:** en general $AB \neq BA$. Por eso en una ecuación matricial importa de qué lado se multiplica.
- La identidad I cumple $AI = IA = A$.
- $AB = 0$ no implica $A = 0$ ni $B = 0$.

Inversa. A (cuadrada) es invertible si existe A^{-1} con $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Existe si y solo si $\det A \neq 0$. Propiedades:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad (A^{-1})^{-1} = A, \qquad (kA)^{-1} = \tfrac{1}{k}A^{-1}, \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Para 2×2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

4. Si $k = -\frac{4}{7}$, el renglón queda $0 = -11$: **c) incompatible para $k = -\frac{4}{7}$.**
5. El término independiente -11 nunca vale cero: **b) ningún valor de k lo hace compatible indeterminado.**
6. Comprobación: $\det \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix} = -7k - 4$, que se anula en el mismo valor.

5.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 5.5.1 · Material de acero para un edificio

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 4.

Para un edificio se compraron 420 kg de acero entre lámina, ángulo y solera, y se pagaron \$4720. El kilogramo de lámina costó \$15, el de ángulo \$7 y el de solera \$4. Los kilogramos de lámina son iguales a los de ángulo más el doble de los de solera. Determine cuántos kilogramos se compraron de cada material.

Resolución.

1. x, y, z: kilogramos de lámina, ángulo y solera.
2. Ecuaciones: $x + y + z = 420$; $x = y + 2z$, o sea, $x - y - 2z = 0$; $15x + 7y + 4z = 4720$.
3. Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 420 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 15 & 7 & 4 & 4720 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 15R_1]{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 420 \\ 0 & -2 & -3 & -420 \\ 0 & -8 & -11 & -1580 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - 4R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 420 \\ 0 & -2 & -3 & -420 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$$

4. $z = 100$; $-2y - 300 = -420 \Rightarrow y = 60$; $x = 420 - 60 - 100 = 260$.
5. Comprobación: $260 = 60 + 2(100)$ y $15(260) + 7(60) + 4(100) = 3900 + 420 + 400 = 4720$.
6. **Lámina 260 kg, ángulo 60 kg y solera 100 kg.**

Ejercicio 5.5.2 · Armadora: tabla de horas por máquina

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 4.

Una armadora produce tres tipos de automóvil, A, B y C, y cada uno pasa por tres máquinas. Las horas que cada máquina dedica a una unidad de cada tipo son:

Máquina	A	B	C
1	3	2	3
2	1	3	4
3	2	7	2

A la semana, la máquina 1 trabaja 35 h; la 2, 27 h, y la 3, 46 h. Determine cuántos automóviles de cada tipo se fabrican por semana.

Resultado: 50 conchas, 30 panqués y 40 cocoles.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.3

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 4.

Un asesor bancario ofrece inversiones de tres tipos, A, B y C. De las de tipo C hay 10 unidades menos que el total de las de los otros dos tipos, y las de tipo A son el doble de las de tipo B. Si debe colocar 500 inversiones al mes, ¿cuántas de cada tipo debe vender?

Resultado: 170 del tipo A, 85 del B y 245 del C.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.4

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo B, problema 4.

Para el sistema

$$a + 2b - c = 2, \qquad 4a + b + c = 3, \qquad 3a + 6b - 3c = 6,$$

determine a) una solución general y b) una solución particular.

Resultado: a) $(a, b, c) = \left(\frac{4-3t}{7},\ \frac{5+5t}{7},\ t\right), t \in \mathbb{R}$; b) con $t = -1$: $(1, 0, -1)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.5

Adaptado de: 1er final 2020-2, tipo C, problema 5.

Determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que el sistema

$$-2x + 4y + kz = 1, \qquad x - 3y - 2z = 0, \qquad kx - y + z = 1$$

es a) compatible determinado y b) incompatible.

Resultado: a) $k \neq 1$ y $k \neq 2$; b) $k = 1$ o $k = 2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.6

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 5.

Obtenga el conjunto solución del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} 2a - b - c + 3d &= 0 \\ -2a - 2b - c &= 0 \\ -a + 2b + c - 6d &= 0 \\ a + b - 3d &= 0 \end{aligned}$$

Resultado: $\{(a, b, c, d) = (-2t,\ 5t,\ -6t,\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

1. F, Q, M, T: libros de Física, Química, Matemáticas y Termodinámica.
2. Ecuaciones: $F + Q + M + T = 30\,000$; $F = M + T$; $Q = 2M + 10\,000$; $Q + M + T = 23\,000$.
3. Con cuatro incógnitas y dos ecuaciones ya despejadas, conviene sustituir (Gauss da lo mismo). En la cuarta: $(2M + 10\,000) + M + T = 23\,000 \Rightarrow 3M + T = 13\,000$.
4. En la primera: $(M + T) + (2M + 10\,000) + M + T = 30\,000 \Rightarrow 4M + 2T = 20\,000 \Rightarrow 2M + T = 10\,000$.
5. Restando: $(3M+T)-(2M+T) = 13\,000-10\,000 \Rightarrow M = 3000$; $T = 10\,000-6000 = 4000$.
6. $Q = 2(3000)+10\,000 = 16\,000$; $F = 3000+4000 = 7000$. Comprobación: $7000+16\,000+3000+4000 = 30\,000$.
7. **Física 7000, Química 16 000, Matemáticas 3000 y Termodinámica 4000 libros.**

Ejercicio 5.5.5 · Parámetro, solución general y particular

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 4.

Sea el sistema

$$x + y + \alpha z = 2, \qquad 3x + 4y + 2z = \alpha, \qquad 2x + 3y - z = 1.$$

Obtenga: a) $\alpha \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea compatible indeterminado; b) la solución general del sistema con ese valor; c) la solución particular con $z = 1$.

Resolución.

1. Gauss sin dividir entre expresiones con α:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 0 & 1 & -1-2\alpha & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & 3-\alpha \end{array}\right]$$

2. El último renglón es $(\alpha - 3)z = 3 - \alpha$. Si $\alpha \neq 3$, $z = -1$ y el sistema es determinado. Si $\alpha = 3$, queda $0 = 0$: **a)** $\alpha = 3$**.** Ningún valor lo hace incompatible.
3. Con $\alpha = 3$: $y - 7z = -3$ y $x + y + 3z = 2$. Con $z = t$: $y = -3 + 7t$, $x = 2 - (-3 + 7t) - 3t = 5 - 10t$.
4. **b)** $(x, y, z) = (5 - 10t,\ -3 + 7t,\ t)$**,** $t \in \mathbb{R}$**.**
5. **c) Con** $z = t = 1$**:** $(x, y, z) = (-5,\ 4,\ 1)$**.** Comprobación: $-5 + 4 + 3 = 2$, $-15 + 16 + 2 = 3 = \alpha$, $-10 + 12 - 1 = 1$.

Ejercicio 5.5.6 · Parámetro: un caso que nunca es determinado

Adaptado de: 1er final 2019-2, tipo A, problema 5.

Determine los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los que el sistema

$$x + y + 2z = 2, \qquad 2x + 3y - z = 5, \qquad 3x + 4y + z = m$$

es a) compatible determinado, b) compatible indeterminado, c) incompatible.

Resolución.

3. Queda $x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x-2)(x+2)$.
4. b) **Raíces:** 1 (doble), $-1,\ 2,\ -2$: $p(x) = (x-1)^2(x+1)(x-2)(x+2)$.

Ejercicio 4.5.8 · Raíz compleja de un polinomio real

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 4.

Sea $p(x) = x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 18x + 18$. Determine todas sus raíces si $\alpha_1 = 1 - i$ es una de ellas.

Resolución.

1. Coeficientes reales: $\alpha_2 = 1 + i$ también es raíz. Factor cuadrático: $(x-1+i)(x-1-i) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.
2. Al dividir, $x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 18x + 18 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 9)$. Se comprueba multiplicando: $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 9x^2 - 18x + 18$.
3. $x^2 + 9 = 0$: $x = \pm 3i$.
4. **Raíces:** $1 - i,\ 1 + i,\ 3i,\ -3i$.

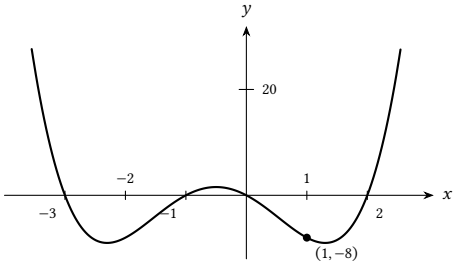
4.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4**.

Ejercicio propuesto 4.6.1

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo B, problema 3.

Determine el polinomio de menor grado, con coeficientes reales, cuya gráfica es la de la figura: corta el eje x en -3, -1, 0 y 2 (en los cuatro lo cruza), crece hacia ambos extremos y pasa por el punto $(1, -8)$.



Resultado: $q(x) = x(x+3)(x+1)(x-2) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 4.6.2

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 3.

Exprese el polinomio $h(x) = x^6 + (2-i)x^5 + (-3-2i)x^4 + (-6+3i)x^3 + 6ix^2$ como producto de factores lineales, si se sabe que i es una de sus raíces.

$$\xrightarrow[R_2+R_3]{R_1-R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

3. $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Comprobación: $\det A = 4$ y el primer renglón de A por la primera columna de A^{-1} da $\frac{1}{4}(1 - 3 + 6) = 1$.
4. Se transpone.

Resultado: $X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.5.5 · Traza, determinante de la inversa y complejos

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 5.

Obtenga la matriz X que satisface $XA + \operatorname{tr}(B)\,C = \det(A^{-1})\,XB$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolución.

1. Números: $\operatorname{tr} B = 8$; $\det A = 0 + 2 = 2$, así que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{2}$.
2. $XA - \frac{1}{2}XB = -8C$, o sea $X\left(A - \frac{1}{2}B\right) = -8C$.
3. $A - \frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} 1-4 & 2+2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, con determinante $0 + 4 = 4$.
4. $\left(A - \frac{1}{2}B\right)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.
5. $X = -8C \cdot \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} i & -3i \\ 0 & 4i \end{bmatrix}$.

Resultado: $X = \begin{bmatrix} -2i & 6i \\ 0 & -8i \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.5.6 · Simétrica y antisimétrica

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo A, problema 5.

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} w & 0 & z \\ x & 0 & y \\ 3 & z & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine x, y, z y w para que A sea: a) simétrica; b) antisimétrica.

Resolución.

1. a) Simétrica, $a_{ij} = a_{ji}$: $a_{12} = a_{21} \Rightarrow 0 = x$; $a_{13} = a_{31} \Rightarrow z = 3$; $a_{23} = a_{32} \Rightarrow y = z = 3$. La diagonal no impone nada: w es libre.

- **Aplicar Descartes con $a_0 = 0$.** Primero se factoriza la potencia de x.
- **Equivocar $p(-x)$.** Cambian de signo solo los coeficientes de las potencias impares.
- **Contar mal las raíces.** Deben ser tantas como el grado, contando multiplicidades. Si faltan, falta una división.
- **Olvidar el coeficiente principal.** El producto de factores lineales lleva a_n al frente: $2x^6 - \cdots = 2x(x-i)\cdots$
- **Gráfica: suponer $a = 1$.** El coeficiente principal se calcula con un punto de la gráfica que no sea raíz.
- **Cuentas con i.** En la división sintética con complejos, $i \cdot i = -1$; un residuo distinto de 0 indica un error.

4.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Algoritmo de la división: $p = d\,q + r$. Residuo: $p(c)$. Factor: $p(c) = 0$ si y solo si $x - c$ divide a p.
- Grado n: n raíces en $\mathbb{C}$ con multiplicidad; $p(x) = a_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$.
- Coeficientes reales: $a \pm bi$ en pareja; $(x-a)^2 + b^2$ es factor.
- Raíces racionales: $\pm\frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}$.
- Descartes: positivas $\leq$ cambios de $p(x)$; negativas $\leq$ cambios de $p(-x)$; bajan de 2 en 2.
- Cota superior: $c > 0$ con renglón de la división sintética sin negativos.
- Coeficiente principal 1: suma de raíces $= -a_{n-1}$; producto $= (-1)^n a_0$.
- Fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Bicuadrado: $u = x^k$.

4.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe el grado: es el número de raíces que debes entregar.
2. Factoriza x^k si no hay término independiente.
3. Mira los coeficientes: ¿reales (usa el conjugado) o complejos (no)?
4. Divide entre cada raíz conocida con división sintética, mostrando la tabla.
5. Con el cociente real, lista los candidatos racionales; si piden Descartes, haz la tabla antes de probar.
6. Llega a grado 2 y usa la fórmula general.
7. Escribe las raíces en una lista y el polinomio como producto de factores lineales, con a_n al frente. Comprueba con suma o producto de raíces.

Si no se encuentra el camino, la división sintética entre la raíz dada con residuo 0 y el cociente bien escrito ya valen buena parte del problema.

3. Sarrus: $(20 + 14 + 54) - (12 + 63 + 20) = 88 - 95 = -7$.
4. $M_{34} = (-4)(-7) = 28$, y $\det A = -28$.

Resultado: $\det A = -28$.

6.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 6.5.1 · G a la izquierda, con $\det A$

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 5.

Obtenga la matriz G que satisface la ecuación matricial $GA + 3(\det A)B = GB - A^2 - 2B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Resolución.

1. Números y potencias: $\det A = -1$; $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.
2. G está a la izquierda en los dos términos: $GA - GB = -A^2 - 2B - 3(\det A)B$, o sea $G(A-B) = -I - 2B + 3B = B - I$.
3. $B - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$; $A - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $\det(A-B) = -4 + 3 = -1$.
4. $(A-B)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.
5. $G = (B-I)(A-B)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Resultado: $G = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.5.2 · Factor común y simplificación

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 5.

Obtenga la matriz X tal que $(XAB - XC)C = C^2$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Resolución.

1. Factor común a la izquierda: $X(AB - C)C = C^2$.
2. $\det C = 3 - 2 = 1 \neq 0$. Se multiplica por C^{-1} a la derecha: $X(AB - C) = C$.
3. $AB = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$, $AB - C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$, $\det(AB - C) = 16 - 18 = -2$.
4. $(AB-C)^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -9 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{9}{2} & -2 \end{bmatrix}$.
5. $X = C(AB-C)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{9}{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+9 & 1-4 \\ -2+\frac{27}{2} & 1-6 \end{bmatrix}$.

Sistema homogéneo. Si todos los términos independientes son cero, el sistema siempre es compatible: tiene al menos la *solución trivial* $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Tiene otras (infinitas) soluciones cuando, al escalonar, quedan menos renglones no nulos que incógnitas.

Transformaciones elementales. Estas tres operaciones con los renglones dan un sistema *equivalente* (con las mismas soluciones):

- intercambiar dos renglones: $R_1 \leftrightarrow R_2$;
- multiplicar un renglón por un número distinto de cero: $-R_2$, $2R_3$;
- sumar a un renglón un múltiplo de otro: $R_2 - 2R_1$.

Método de Gauss. Con esas operaciones se hacen ceros debajo de cada pivote hasta llegar a la forma *escalonada*; después se despeja de abajo hacia arriba (sustitución regresiva). Si además se hacen ceros arriba de los pivotes, se llega a la forma escalonada reducida (Gauss-Jordan).

Solución general y particular. En un sistema compatible indeterminado, las incógnitas sin pivote son *libres* (parámetros); las demás se despejan en función de ellas. Esa expresión es la *solución general*. Una *solución particular* se obtiene al dar un valor a cada parámetro.

5.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
Una historia con compras, producción, personas o inversiones y pregunta «¿cuántos…?»	Planteamiento (5.3.1) y Gauss (5.3.2)
Una tabla de horas, costos o insumos por tipo de producto	Planteamiento por renglones de la tabla (5.3.1)
«Determine los valores de k para que el sistema sea compatible determinado, indeterminado o incompatible»	Sistema con parámetro (5.3.3)
«Obtenga la solución general y una particular» o «el conjunto solución»	Solución general (5.3.4)
«Sistema homogéneo» (todos los términos independientes son cero)	Solución general (5.3.4); la trivial siempre existe
«Obtenga un sistema cuyo conjunto solución sea…»	Construir el sistema (5.3.5)

5.3 Procedimientos

5.3.1 Planteamiento de un problema

1. Nombra las incógnitas con palabras: «x: kilogramos de plátano». Debe haber tantas incógnitas como cantidades se piden.
2. Escribe una ecuación por cada dato que relacione cantidades: un total de piezas, un total de dinero (precio por cantidad), una comparación («es el doble de…», «excede en 5 a…»).
3. Pasa todas las incógnitas a la izquierda y ordénalas siempre igual: x, y, z.
4. Escribe la matriz aumentada y resuelve por Gauss (5.3.2).

6.3.2 Inversa por Gauss-Jordan

1. Escribe la matriz aumentada $[\, A \mid I \,]$.
2. Con operaciones de renglón (intercambiar, multiplicar por $k \neq 0$, sumar un múltiplo de otro renglón) lleva el lado izquierdo a I: primero ceros debajo de la diagonal, luego unos en la diagonal, luego ceros encima.
3. Lo que queda a la derecha es A^{-1}: $[\, A \mid I \,] \to [\, I \mid A^{-1} \,]$.
4. Si aparece un renglón de ceros a la izquierda, A no tiene inversa.

6.3.3 Cofactores, adjunta e inversa por la adjunta

1. Para cada elemento, tacha su renglón y su columna; el determinante que queda es el menor M_{ij}.
2. Aplica el signo de tablero de ajedrez: $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, con + en la esquina $(1, 1)$.
3. adj A es la matriz de cofactores **transpuesta**.
4. det A se obtiene con un renglón de A por los cofactores de ese mismo renglón.
5. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$. Comprueba con un elemento de $AA^{-1} = I$.

6.3.4 Determinantes de orden 4 o 5

1. Busca el renglón o la columna con más ceros.
2. Si no hay suficientes, crea ceros sumando múltiplos de un renglón a otro; eso no cambia el determinante.
3. Desarrolla por cofactores sobre esa línea: solo cuentan los elementos distintos de cero. Cuida el signo $(-1)^{i+j}$.
4. Repite hasta llegar a orden 3 (Sarrus) u orden 2.

6.3.5 Determinante o inversa con parámetro

1. Calcula det A como polinomio en el parámetro, desarrollando por la línea que más simplifique.
2. Factoriza el polinomio. Las raíces son los valores con $\det A = 0$.
3. «Existe A^{-1}» si y solo si $\det A \neq 0$: la respuesta son todos los valores **excepto** esas raíces.
4. Si el parámetro es complejo ($a \in \mathbb{C}$), incluye las raíces complejas.

6.3.6 Simétrica y antisimétrica con incógnitas

1. Simétrica: iguala cada par $a_{ij} = a_{ji}$ (fuera de la diagonal). La diagonal queda libre.
2. Antisimétrica: la diagonal es cero ($a_{ii} = 0$) y $a_{ij} = -a_{ji}$.
3. Resuelve el sistema que resulta e indica qué incógnitas quedan libres.

6.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Ecuación matricial

5.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Planteamiento: compra de fruta

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 4.

Un comerciante compró 200 kg de fruta entre plátanos, melones y piñas. Los kilogramos de plátano son iguales a los de piña más la mitad de los de melón. El kilogramo de plátano cuesta \$8, el de melón \$5 y el de piña \$15, y en total pagó \$1640. Determine cuántos kilogramos compró de cada fruta.

Resolución.

1. Incógnitas: x, y, z: kilogramos de plátano, melón y piña.
2. Ecuaciones: $x+y+z=200$; $x=z+\frac{1}{2}y$, es decir, $2x-y-2z=0$; $8x+5y+15z=1640$.
3. Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 8 & 5 & 15 & 1640 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-8R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -3 & -4 & -400 \\ 0 & -3 & 7 & 40 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -3 & -4 & -400 \\ 0 & 0 & 11 & 440 \end{array}\right]$$

4. Sustitución regresiva: $11z=440 \Rightarrow z=40$; $-3y-160=-400 \Rightarrow y=80$; $x=200-80-40=80$.
5. Comprobación: $80=40+\frac{1}{2}(80)$ y $8(80)+5(80)+15(40)=640+400+600=1640$.
6. **Compró 80 kg de plátano, 80 kg de melón y 40 kg de piña.**

Ejemplo resuelto · Sistema con parámetro

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo A, problema 4.

Determine, si existen, los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que el sistema

$$4x-y+2z=3, \qquad x-2y-2z=0, \qquad x-y+kz=2$$

es a) compatible determinado, b) compatible indeterminado, c) incompatible.

Resolución.

1. Se pone primero la ecuación que empieza con x y se deja abajo la que tiene k:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & k & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-4R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & k+2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & k+2 & 2 \\ 0 & 7 & 10 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-7R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & k+2 & 2 \\ 0 & 0 & -7k-4 & -11 \end{array}\right]$$

2. El último renglón es $(-7k-4)z=-11$. El coeficiente se anula en $k=-\frac{4}{7}$.
3. Si $k \neq -\frac{4}{7}$, hay tres pivotes: **a) compatible determinado para todo $k \neq -\frac{4}{7}$.**

Transpuesta, conjugada y conjugada transpuesta. A^T cambia renglones por columnas; $\bar{A}$ conjuga cada elemento; $A^* = \bar{A}^T$. Si A es real, $A^* = A^T$.

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \qquad (AB)^T = B^T A^T, \qquad (A^T)^T = A, \qquad (AB)^* = B^* A^*.$$

Matrices especiales.

Nombre	Condición
Diagonal, $\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n)$	$a_{ij}=0$ si $i \neq j$
Triangular superior (inferior)	ceros debajo (encima) de la diagonal
Simétrica	$A^T = A$, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$
Antisimétrica	$A^T = -A$: diagonal de ceros y $a_{ij} = -a_{ji}$
Ortogonal	$A^T A = I$, es decir, $A^{-1} = A^T$
Hermitiana	$A^* = A$ (diagonal real)
Antihermitiana	$A^* = -A$ (diagonal imaginaria pura o cero)
Unitaria	$A^* A = I$, es decir, $A^{-1} = A^*$

Traza. $\operatorname{tr} A = \sum a_{ii}$, la suma de la diagonal. Cumple $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr}(kA) = k \operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ y $\operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A$. Es un **número**: en una ecuación matricial, $\operatorname{tr}(B)\,C$ es un escalar por una matriz.

Determinante. Es un número asociado a una matriz cuadrada.

- Orden 2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
- Orden 3, regla de Sarrus: suma de los productos de las tres diagonales que bajan hacia la derecha menos la suma de las tres que suben.
- Cualquier orden, desarrollo por cofactores sobre el renglón i: $\det A = \sum_j a_{ij} C_{ij}$, con el **cofactor** $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ y el **menor** M_{ij}, que es el determinante que queda al quitar el renglón i y la columna j. Lo mismo vale por columnas.

Propiedades del determinante.

- $\det A^T = \det A$, $\det(AB) = \det A \det B$, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$, $\det \bar{A} = \overline{\det A}$.
- $\det(kA) = k^n \det A$ si A es de orden n. Cuidado: $\det(2A) = 4 \det A$ en 2×2.
- Un renglón (o columna) de ceros, o dos renglones iguales o proporcionales: $\det = 0$.
- Intercambiar dos renglones cambia el signo. Multiplicar un renglón por k multiplica el determinante por k.
- Sumar a un renglón un múltiplo de otro **no** cambia el determinante (es la base del método de condensación).
- Triangular o diagonal: el determinante es el producto de la diagonal.

Adjunta. $\operatorname{adj} A$ es la transpuesta de la matriz de cofactores: $(\operatorname{adj} A)_{ij} = C_{ji}$. Cumple

$$A\,(\operatorname{adj} A) = (\det A)\, I, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A, \qquad \operatorname{adj} A = (\det A)\, A^{-1}.$$

Sistemas en forma matricial. El sistema $AX = B$ con $\det A \neq 0$ tiene solución única $X = A^{-1}B$. La regla de Cramer da cada incógnita como $x_k = \det A_k / \det A$, donde A_k es

Resolución.

1. x, y, z: automóviles de tipo A, B y C por semana. Cada máquina (renglón de la tabla) da una ecuación: $3x + 2y + 3z = 35$, $x + 3y + 4z = 27$, $2x + 7y + 2z = 46$.
2. Se pone primero la ecuación de la máquina 2, que empieza con 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 27 \\ 3 & 2 & 3 & 35 \\ 2 & 7 & 2 & 46 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 27 \\ 0 & -7 & -9 & -46 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 27 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & -7 & -9 & -46 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+7R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 27 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & -51 & -102 \end{array}\right]$$

3. $z = 2$; $y = -8 + 6(2) = 4$; $x = 27 - 3(4) - 4(2) = 7$.
4. Comprobación con la máquina 1: $3(7) + 2(4) + 3(2) = 21 + 8 + 6 = 35$.
5. **Se fabrican 7 autos del tipo A, 4 del B y 2 del C por semana.**

Ejercicio 5.5.3 · Ingenieros por especialidad

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 4.

En una reunión hay 33 ingenieros civiles, mecánicos y petroleros. Los mecánicos son el doble de los petroleros más tres. El doble de los mecánicos más el triple de los petroleros, menos uno, es igual al doble de los civiles más diez. ¿Cuántos ingenieros de cada especialidad hay?

Resolución.

1. c, m, p: ingenieros civiles, mecánicos y petroleros.
2. Ecuaciones: $c + m + p = 33$; $m = 2p + 3$, o sea, $m - 2p = 3$; $2m + 3p - 1 = 2c + 10$, o sea, $-2c + 2m + 3p = 11$.
3. Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 77 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-4R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 65 \end{array}\right]$$

4. $p = 5$; $m = 3 + 2(5) = 13$; $c = 33 - 13 - 5 = 15$.
5. Comprobación: $2(13) + 3(5) - 1 = 40$ y $2(15) + 10 = 40$.
6. **Hay 15 civiles, 13 mecánicos y 5 petroleros.**

Ejercicio 5.5.4 · Inventario de una librería: cuatro incógnitas

Adaptado de: 2º final 2019-1, problema 5.

Una librería tiene 30 000 libros de Física, Química, Matemáticas y Termodinámica. Los de Física son tantos como los de Matemáticas y Termodinámica juntos. Si al doble de los de Matemáticas se le suman 10 000, se obtienen los de Química. Los de Química, Matemáticas y Termodinámica suman 23 000. ¿Cuántos ejemplares hay de cada materia?

Resolución.

5.7 Errores frecuentes

- **Traducir mal una comparación.** «A es el doble de B más tres» es $A = 2B + 3$, no $A = 2(B + 3)$. Escribe la igualdad con palabras antes de pasarla a símbolos.
- **Desordenar las incógnitas.** Al pasar $x = z + \frac{1}{2}y$ a la matriz, cada coeficiente va en la columna de su incógnita: $2x - y - 2z = 0$.
- **Dividir entre una expresión con el parámetro.** Dividir entre $k - 2$ supone $k \neq 2$ y pierde justo el caso que se pregunta. Combina renglones en cruz, como $2R_3 + (3k-1)R_2$.
- **Decidir solo con el determinante.** det $= 0$ dice «no es determinado», pero no distingue entre indeterminado e incompatible: hay que leer el último renglón.
- **Olvidar un inciso.** Si ningún valor da un sistema indeterminado, se escribe «ningún valor de k».
- **Dar una sola solución en un sistema indeterminado.** La solución general lleva parámetros; la particular es un ejemplo.
- **No comprobar.** Sustituir la solución en una ecuación original toma un minuto y detecta casi todos los errores de signo.

5.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Operaciones de renglón: $R_i \leftrightarrow R_j$; cR_i con $c \neq 0$; $R_i + cR_j$.
- Forma escalonada con último renglón $0\ 0 \mid b$:
  - $a \neq 0$: compatible determinado;
  - $a = 0$ y $b = 0$: compatible indeterminado;
  - $a = 0$ y $b \neq 0$: incompatible.
- Homogéneo: siempre compatible; tiene soluciones no triviales si hay menos pivotes que incógnitas.
- Sistema cuadrado: $\det A \neq 0$ si y solo si es compatible determinado.
- Número de parámetros de la solución general = incógnitas − pivotes.

5.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Planteamiento: escribe qué es cada incógnita y una ecuación por dato. Revisa que cada ecuación sume cosas del mismo tipo (piezas con piezas, pesos con pesos).
2. Ordena las ecuaciones para que el primer pivote sea 1 y deja abajo el renglón con el parámetro.
3. Escribe cada operación sobre la flecha: si te equivocas, se puede seguir el razonamiento.
4. Con parámetro: lleva el último renglón a la forma $f(k)\,z = g(k)$ y analiza las raíces de f una por una.
5. Comprueba en las ecuaciones originales y responde con palabras.

1. Gauss:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & m \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & m-6 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right]$$
2. El último renglón no tiene pivote para ningún m: en sus coeficientes, la tercera ecuación es la suma de las dos primeras. **a) Ningún valor de** m da un sistema compatible determinado.
3. **b) Compatible indeterminado si** $m = 7$**:** el renglón es $0 = 0$. Su conjunto solución es $z = t$, $y = 1 + 5t$, $x = 2 - y - 2t = 1 - 7t$.
4. **c) Incompatible si** $m \neq 7$**:** el renglón es $0 = m - 7 \neq 0$.
5. Comprobación: el determinante de los coeficientes vale 0, lo que confirma a).

Ejercicio 5.5.7 · Parámetro: un caso que nunca es incompatible

Adaptado de: 1er final 2017-2, tipo C, problema 5.

Determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que el sistema

$$x - 2y - 3z = -7, \qquad 3x - ky - 5z = -21, \qquad y + z = k - 2$$

es a) compatible determinado, b) compatible indeterminado, c) incompatible.

Resolución.

1. Gauss, dejando abajo el renglón que tiene k en el pivote:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 3 & -k & -5 & -21 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 6-k & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 \\ 0 & 6-k & 4 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{R_3-(6-k)R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & k-2 \\ 0 & 0 & k-2 & (k-6)(k-2) \end{array}\right]$$
2. Tercer renglón: $4 - (6 - k) = k - 2$ y $0 - (6 - k)(k - 2) = (k - 6)(k - 2)$. Queda $(k - 2)z = (k - 6)(k - 2)$.
3. **a) Compatible determinado para** $k \neq 2$**:** $z = k-6$, $y = k-2-z = 4$, $x = -7+2y+3z = 3k - 17$.
4. **b) Compatible indeterminado para** $k = 2$**:** el renglón queda $0 = 0$.
5. **c) Incompatible: ningún valor de** k, porque cuando el coeficiente se anula también se anula el término independiente.

Ejercicio 5.5.8 · Sistema homogéneo con cuatro incógnitas

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 4.

Determine la solución general y una particular del sistema

$$\begin{aligned} 7w + 5x + 10y - 2z &= 0 \\ -6w - 2x - 4y + 4z &= 0 \\ 2w + x + 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

Resolución.

1. Es homogéneo: basta escalonar la matriz de coeficientes (la columna de ceros no cambia). Se pone primero la tercera ecuación:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 10 & -2 \\ -6 & -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+3R_1]{2R_2-7R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2-3R_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Quedan dos ecuaciones con cuatro incógnitas: $2w + x + 2y - z = 0$ y $x + 2y + z = 0$. Hay dos incógnitas libres: $y = s$, $z = t$.
3. $x = -2s - t$; $2w = -x - 2y + z = 2s + t - 2s + t = 2t \Rightarrow w = t$.
4. **Solución general:** $(w, x, y, z) = (t,\ -2s - t,\ s,\ t)$**, con** $s, t \in \mathbb{R}$**.**
5. **Una particular** $(s = t = 1)$: $(w, x, y, z) = (1, -3, 1, 1)$. Comprobación en la primera: $7 - 15 + 10 - 2 = 0$.

5.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.5**.

Ejercicio propuesto 5.6.1

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 4.

Se compraron 65 cajas de los productos A, B y C. La caja de A costó \$17, la de B \$30 y la de C \$48, y se pagaron \$1830 en total. Las cajas de A son tantas como las de B y C juntas, menos 5. ¿Cuántas cajas se compraron de cada producto?

Resultado: 30 cajas de A, 20 de B y 15 de C.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.2

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 4.

Un panadero vendió 120 piezas entre conchas, panqués y cocoles. Las conchas más los panqués son el doble de los cocoles. Las conchas y los cocoles cuestan \$3 y los panqués \$5. Si reunió \$420, ¿cuántas piezas vendió de cada tipo?